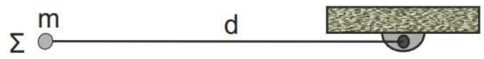
Επιτάχυνση και ισχύς σε καμπυλόγραμμη κίνηση



Ένα σημειακό σφαιρίδιο Σ μάζας m=0,1kg είναι δεμένο στο άκρο αβαρούς και μη εκτατού νήματος μήκους d=0,2m, το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο σε οριζόντια οροφή. Το σώμα συγκρατείται, έτσι ώστε το νήμα να είναι οριζόντιο και αφήνεται ελεύθερο να κινηθεί.

Α. όταν το νήμα έχει διαγράψει γωνία $\varphi=30^0$, να υπολογιστούν:

α. το μέτρο της ταχύτητας του σφαιριδίου

β. η επιτάχυνση του σφαιριδίου

γ. η τάση του νήματος

δ. ο ρυθμός μεταβολής της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας του σφαιριδίου

ε. ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σφαιριδίου

Β. όταν το νήμα έχει διαγράψει γωνία $\varphi=90^0$, να υπολογιστούν:

α. το μέτρο της ταχύτητας του σφαιριδίου

β. η επιτάχυνση του σφαιριδίου

γ. η τάση του νήματος

δ. ο ρυθμός μεταβολής της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας του σφαιριδίου

ε. ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σφαιριδίου

Γ. όταν το νήμα έχει διαγράψει γωνία $\varphi=120^0$, να υπολογιστούν:

α. το μέτρο της ταχύτητας του σφαιριδίου

β. η επιτάχυνση του σφαιριδίου

γ. η τάση του νήματος

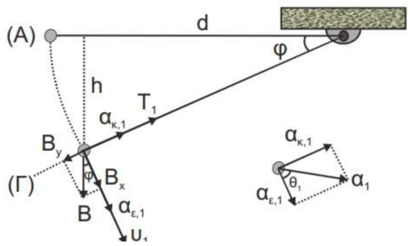
δ. ο ρυθμός μεταβολής της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας του σφαιριδίου

ε. ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σφαιριδίου

Δίνεται $g=10m/s^2$, $ημ30^0=\frac{1}{2}, συν30^0=\frac{\sqrt{3}}{2}$ και η αντίσταση του αέρα αμελητέα.

Απάντηση:

Α.



α. Εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου – ενέργειας (Θ.Μ.Κ.Ε.) από τη θέση (Α) στη θέση (Γ) του σφαιριδίου και έχουμε (η τάση του νήματος δεν εργάζεται, αφού είναι μόνιμα κάθετη στην ταχύτητα του σφαιριδίου):

$$K_Γ - K_A = W_B \rightarrow \frac{1}{2}mυ_1^2 - 0 = mgh \rightarrow \frac{1}{2}mυ_1^2 = mgdημφ \rightarrow υ_1 = \sqrt{2}\,m/s$$

β. Το σφαιρίδιο σε κάθε θέση του δέχεται το βάρος του $\vec{B}$ και την τάση του νήματος $\vec{T}$, οπότε η συνισταμένη τους θα διαμορφώνει την επιτάχυνσή του. Αναλύουμε τις δυνάμεις σε άξονες x'x (εφαπτομενικός της τροχιάς) και y'y (στην ακτίνα της τροχιάς).

Αφού το σφαιρίδιο κινείται κυκλικά θα έχει μια κεντρομόλο επιτάχυνση $\overrightarrow{\alpha_{\kappa,1}}$ στη διεύθυνση του νήματος (άξονας y'y) και με φορά προς το κέντρο της τροχιάς, για την οποία ισχύει:

$$\alpha_{\kappa,1} = \frac{\upsilon_1^2}{d} \rightarrow \alpha_{\kappa,1} = 10\,m/s^2$$

Όμως αυτή η επιτάχυνση δεν είναι η μοναδική, αφού στον άξονα x'x η συνισταμένη των δυνάμεων είναι διάφορη του μηδενός. Εξάλλου η συνισταμένη των δυνάμεων που δέχεται το σφαιρίδιο, άρα και η επιτάχυνσή του δεν έχει τη διεύθυνση της ακτίνας. Από την εφαρμογή του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα για τον άξονα x'x, θα υπολογίσουμε την επιτάχυνση $\overrightarrow{\alpha_x}$, η οποία ονομάζεται και επιτρόχειος ή γραμμική επιτάχυνση $\overrightarrow{\alpha_\varepsilon}$:

$$\Sigma\overrightarrow{F_x} = m\overrightarrow{\alpha_x} \rightarrow B_x = m\alpha_{\varepsilon,1} \rightarrow mg\sigma\upsilon\nu\varphi = m\alpha_{\varepsilon,1} \rightarrow \alpha_{\varepsilon,1} = 5\sqrt{3}\,m/s^2$$

Η επιτρόχειος επιτάχυνση στη θέση (Γ) (και σε κάθε θέση μέχρι την κατακόρυφη) προκύπτει ομόρροπη της γραμμικής ταχύτητας του σφαιριδίου, συνεπώς το μέτρο της ταχύτητας αυξάνεται.

Έτσι η επιτάχυνση $\overrightarrow{\alpha_1}$ του σφαιριδίου στη θέση (Γ) θα έχει μέτρο:

$$\alpha_1 = \sqrt{\alpha_{\kappa,1}^2 + \alpha_{\varepsilon,1}^2} \rightarrow \alpha_1 = \sqrt{175}\,m/s^2$$

ενώ η κατεύθυνσή της θα προσδιοριστεί μέσω της γωνίας θ_1, που θα σχηματίζει έστω με τον άξονα x΄x:

$$\varepsilon\varphi\theta_1 = \frac{\alpha_{\kappa,1}}{\alpha_{\varepsilon,1}} \rightarrow \varepsilon\varphi\theta_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Σχόλια:

- **i. η επιτάχυνση του σφαιριδίου είναι ανεξάρτητη της μάζας του.**
- **ii. η κεντρομόλος (ακτινική) επιτάχυνση ευθύνεται για τη μεταβολή της διεύθυνσης της γραμμικής ταχύτητας του σφαιριδίου.**
- **iii. Η επιτρόχειος (εφαπτομενική) επιτάχυνση ευθύνεται για τη μεταβολή της τιμής της γραμμικής ταχύτητας του σφαιριδίου.**

γ. Για την εύρεση της τάσης του νήματος στη θέση (Γ), εφαρμόζουμε το δεύτερο νόμο Νεύτωνα στον άξονα y'y και έχουμε:

$$\Sigma\overrightarrow{F_y} = m\overrightarrow{\alpha_{\kappa,1}} \rightarrow T_1 - B_y = m\alpha_{\kappa,1} \rightarrow T_1 - mg\eta\mu\varphi = m\alpha_{\kappa,1} \rightarrow T_1 = 1{,}5N$$

δ. Ο ρυθμός μεταβολής της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας $\frac{dU_{BAP}}{dt}$ του σφαιριδίου, οφείλεται στην ισχύ του βάρους του.

Προσοχή όμως: η ισχύς του βάρους θα είναι $P_B = B_x\upsilon$, αφού μόνο η $\overrightarrow{B_x}$ συνιστώσα του βάρους εργάζεται κατά μήκος της τροχιάς. Έτσι:

$$\frac{dU_{BAP}}{dt} = -P_B \rightarrow \frac{dU_{BAP}}{dt} = -B_x\upsilon_1 \rightarrow \frac{dU_{BAP}}{dt} = -mg\sigma\upsilon\nu\varphi\upsilon_1 \rightarrow \frac{dU_{BAP}}{dt} = -\frac{\sqrt{6}}{2} J/s$$

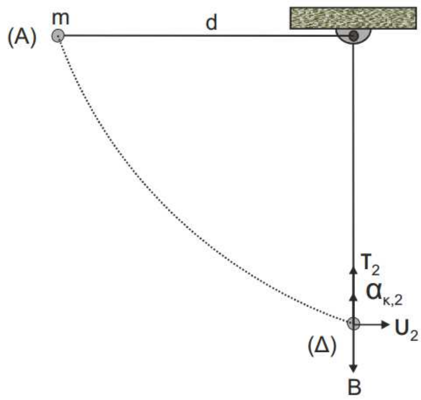
ε. Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας $\frac{dK}{dt}$ του σφαιριδίου, οφείλεται στην ισχύ της συνισταμένης των δυνάμεων στον άξονα x’x, αφού αυτή ευθύνεται για τη μεταβολή της τιμής της ταχύτητάς του. Έτσι:

$$\frac{dK}{dt} = P_{\Sigma F_x} \rightarrow \frac{dK}{dt} = \Sigma F_x\upsilon_1 \rightarrow \frac{dK}{dt} = mg\sigma\upsilon\nu\varphi\upsilon_1 \rightarrow \frac{dK}{dt} = \frac{\sqrt{6}}{2} J/s$$

Σχόλια:

- **i. Οι δύο ρυθμοί προκύπτουν προφανώς αντίθετοι, αφού η μηχανική ενέργεια του σφαιριδίου διατηρείται, καθώς κατά την κίνησή του εργάζεται μόνο το βάρος, που είναι διατηρητική δύναμη.**
- **ii. (Μόνο για μαθητές Β’ Λυκείου) οι παραπάνω ρυθμοί θα μπορούσαν να υπολογιστούν και μέσω εσωτερικού γινομένου δύναμης επί ταχύτητα.**

Β.



α. Εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου – ενέργειας (Θ.Μ.Κ.Ε.) από τη θέση (Α) στη θέση (Δ) του σφαιριδίου και έχουμε:

$$K_\Delta - K_A = W_B \rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon_2^2 - 0 = mgd \rightarrow$$
$$\rightarrow \upsilon_2 = 2m/s$$

β. Στη θέση (Δ) η επιτάχυνση του σφαιριδίου $\vec{\alpha_2}$ θα είναι μόνο η κεντρομόλος $\vec{\alpha_{\kappa,2}}$ αφού η συνισταμένη των δυνάμεων στον άξονα x’x είναι ίση με μηδέν σε αυτή τη θέση. Έτσι:

$$\alpha_{\kappa,2} = \frac{\upsilon_2^2}{d} \rightarrow \alpha_{\kappa,2} = 20m/s^2$$

γ. Για την εύρεση της τάσης του νήματος στη θέση (Δ), εφαρμόζουμε το δεύτερο νόμο Νεύτωνα στον άξονα y’y και έχουμε:

$$\Sigma\vec{F_y} = m\vec{\alpha_{\kappa,2}} \rightarrow T_2 - B = m\alpha_{\kappa,2} \rightarrow T_2 - mg = m\alpha_{\kappa,2} \rightarrow T_2 = 3N$$

Σχόλια:

- **i. η τάση του νήματος μεγιστοποιείται στη θέση (Δ)**
- **ii. η ταχύτητα του σφαιριδίου μεγιστοποιείται στη θέση (Δ), αφού η συνισταμένη των δυνάμεων στον άξονα x΄x είναι μηδέν ή εναλλακτικά, αφού εκεί ελαχιστοποιείται η βαρυτική δυναμική του ενέργεια.**

δ. Ο ρυθμός μεταβολής της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας $\frac{dU_{BAP}}{dt}$ του σφαιριδίου θα είναι:

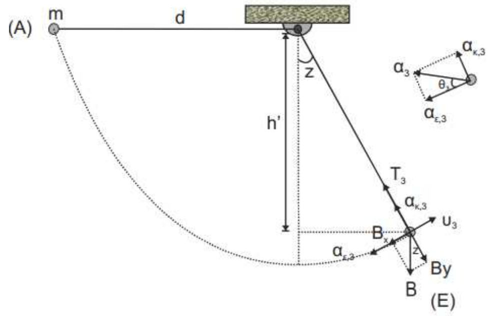
$$\frac{dU_{BAP}}{dt} = -P_B \rightarrow \frac{dU_{BAP}}{dt} = -B_x\upsilon_2 \xrightarrow{B_x=0} \frac{dU_{BAP}}{dt} = 0$$

ε. Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας $\frac{dK}{dt}$ του σφαιριδίου θα είναι:

$$\frac{dK}{dt} = P_{\Sigma F_x} \rightarrow \frac{dK}{dt} = \Sigma F_x \upsilon_2 \rightarrow \frac{dK}{dt} = 0$$

Σχόλιο: όταν μεγιστοποείται η ταχύτητα του σώματος, ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής του ενέργειας είναι ίσος με μηδέν.

Γ. α. Εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου – ενέργειας (Θ.Μ.Κ.Ε.) από τη θέση (Α) στη θέση (Ε) του σφαιριδίου. Αφού το νήμα έχει διαγράψει γωνία φ=120^0 σε σχέση με τη θέση (Α), για τη γωνία z θα ισχύει z=30^0:



$$K_\Delta - K_A = W_B \rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon_3^2 - 0 = mgh' \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon_3^2 = mgd\sigma\upsilon\nu z \rightarrow$$

$$\rightarrow \upsilon_3 = \sqrt{2\sqrt{3}}\ m/s$$

β. Για το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης $\overrightarrow{\alpha_{\kappa,3}}$ ισχύει:

$$\alpha_{\kappa,3} = \frac{\upsilon_3^2}{d} \rightarrow \alpha_{\kappa,3} = 10\sqrt{3}\ m/s^2$$

Για το μέτρο της επιτροχείου επιτάχυνσης $\overrightarrow{\alpha_{\varepsilon,3}}$ θα ισχύει:

$$\Sigma\overrightarrow{F_x} = m\overrightarrow{\alpha_{\varepsilon,3}} \rightarrow B_x = m\alpha_{\varepsilon,3} \rightarrow mg\eta\mu z = m\alpha_{\varepsilon,3} \rightarrow \alpha_{\varepsilon,3} = 5\ m/s^2$$

Η επιτρόχειος επιτάχυνση στη θέση (Ε) (και σε κάθε θέση μετά την κατακόρυφη) προκύπτει αντίρροπη της γραμμικής ταχύτητας του σφαιριδίου, συνεπώς το μέτρο της ταχύτητας μειώνεται.

Έτσι η επιτάχυνση $\overrightarrow{\alpha_3}$ του σφαιριδίου στη θέση (Ε) θα έχει μέτρο:

$$\alpha_3 = \sqrt{\alpha_{\kappa,3}^2 + \alpha_{\varepsilon,3}^2} \rightarrow \alpha_3 = \sqrt{325}\ m/s^2$$

ενώ η κατεύθυνσή της θα προσδιοριστεί μέσω της γωνίας θ_3, που θα σχηματίζει έστω με τον άξονα x'x:

$$\varepsilon\varphi\theta_3 = \frac{\alpha_{\kappa,3}}{\alpha_{\varepsilon,3}} \rightarrow \varepsilon\varphi\theta_3 = 2\sqrt{3}$$

γ. Για την εύρεση της τάσης του νήματος στη θέση (Ε), εφαρμόζουμε το δεύτερο νόμο Νεύτωνα στον άξονα y'y και έχουμε:

$$\Sigma\overrightarrow{F_y} = m\overrightarrow{\alpha_{\kappa,3}} \rightarrow T_3 - B_y = m\alpha_{\kappa,3} \rightarrow T_3 - mg\sigma\upsilon\nu z = m\alpha_{\kappa,3} \rightarrow T_3 = 1{,}5\sqrt{3}N$$

δ. Ο ρυθμός μεταβολής της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας $\frac{dU_{BAP}}{dt}$ του σφαιριδίου θα είναι:

$$\frac{dU_{BAP}}{dt} = -P_B \rightarrow \frac{dU_{BAP}}{dt} = B_x\upsilon_3 \rightarrow \frac{dU_{BAP}}{dt} = mg\eta\mu z\upsilon_3 \rightarrow \frac{dU_{BAP}}{dt} = \sqrt{0{,}5\sqrt{3}}\ J/s$$

ε. Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας $\frac{dK}{dt}$ του σφαιριδίου θα είναι:

$$\frac{dK}{dt}=P_{\Sigma F_x} \rightarrow \frac{dK}{dt}=\Sigma F_x \upsilon_3 \rightarrow \frac{dK}{dt}=-mg\eta\mu z\upsilon_3 \rightarrow \frac{dK}{dt}=-\sqrt{0,5\sqrt{3}}\ J/s$$

Φυσικής-Χημείας

Γιατί το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους…

Επιμέλεια:

Παπάζογλου Αποστόλης