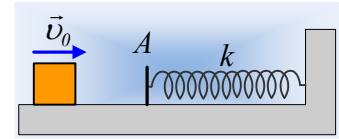


Το σώμα πέφτει σε ιδανικό ελατήριο.

Ένα σώμα μάζας 2kg κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο με σταθερή ταχύτητα v_0 κατά μήκος του άξονα ενός ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k=200\text{N/m}$, όπως στο σχήμα. Θεωρούμε ότι στο άκρο A του ελατηρίου $x=0$.

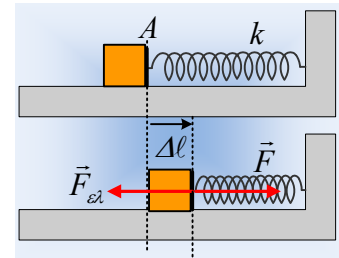


- i) Το σώμα πέφτει στο ελατήριο, το οποίο αρχίζει να συσπειρώνεται, ενώ το ίδιο επιβραδύνεται. Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί επιβραδύνεται το σώμα; Να υπολογίσετε την επιτάχυνση του σώματος τη στιγμή που το σώμα περνά από τη θέση $x_1=0,1\text{m}$.
- ii) Κάποιος σας λέει ότι η κίνηση του σώματος για όσο χρόνο κινείται προς τα δεξιά, είναι ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη. Συμφωνείτε ή διαφωνείτε και γιατί;
- iii) Κάποια στιγμή, η ταχύτητα του σώματος μηδενίζεται, στη θέση B με $x_2=0,2\text{m}$. Να βρείτε το μέτρο της δύναμης που δέχεται το σώμα από το ελατήριο, σε συνάρτηση με τη θέση x και να κάνετε τη γραφική της παράσταση. Πόση επιτάχυνση έχει το σώμα στη θέση B;
- iv) Να υπολογιστεί το έργο της δύναμης που ασκήθηκε στο σώμα από το ελατήριο, από το A στο B.
- v) Να υπολογιστεί η αρχική ταχύτητα v_0 του σώματος.
- vi) Να αποδείξετε ότι τελικά το σώμα θα κινηθεί προς τα αριστερά με ταχύτητα μέτρου v_0 .

Υπενθυμίζεται ότι σύμφωνα με το νόμο του Hooke, όταν μια δύναμη F ασκείται σε ένα ελατήριο, του προκαλεί παραμόρφωση (επιμήκυνση ή συσπείρωση) για την οποία ισχύει $F=k\cdot\Delta\ell$.

Απάντηση:

- i) Μόλις το σώμα έρθει σε επαφή με το ελατήριο, αρχίζει να το παραμορφώνει (συσπειρώνει). Αλλά αυτό σημαίνει ότι το σώμα ασκεί στο ελατήριο τη δύναμη F , η οποία έχει μέτρο $F=k\cdot\Delta\ell$ και φορά προς τα δεξιά, όπως στο σχήμα. Αλλά τότε με βάση τον τρίτο νόμο του Νεύτωνα, το ελατήριο ασκεί στο σώμα μια δύναμη, την οποία ονομάζουμε δύναμη ελατηρίου $F_{ελ}$, με το ίδιο μέτρο και φορά προς τα αριστερά.



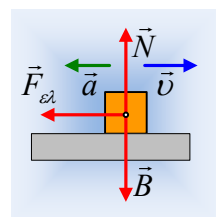
Αλλά τότε εφαρμόζοντας για το σώμα το 2^ο νόμο του Νεύτωνα και λαμβάνοντας υπόψη ότι το σώμα ισορροπεί στην κατακόρυφη διεύθυνση, οπότε $\Sigma F_y=0$ ή $N=mg$,

παίρνουμε $\Sigma F_x=ma \rightarrow F_{ελ}=ma \rightarrow$

$$\alpha = \frac{F_{ελ}}{m} = \frac{k \cdot \Delta\ell}{m} = \frac{kx_1}{m} = \frac{200 \cdot 0,1}{2} \text{ m/s}^2 = 10 \text{ m/s}^2.$$

Η επιτάχυνση αυτή έχει την φορά της $F_{ελ}$, συνεπώς έχει αντίθετη φορά από την ταχύτητα και το σώμα επιβραδύνεται, μέχρι να μηδενιστεί η ταχύτητά του.

- ii) Η κίνηση του σώματος ΔΕΝ είναι ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη, αφού η παραπάνω επιτάχυνση δεν είναι σταθερή. Από την παραπάνω σχέση βλέπουμε ότι το μέτρο της επιτάχυνσης είναι ανάλογο της συσπείρωσης $\Delta\ell$ του ελατηρίου. Έτσι καθώς το σώμα κινείται προς τα δεξιά, η επιβράδυνση μεγαλώνει.
- iii) Είδαμε ότι η δύναμη που ασκεί το ελατήριο στο σώμα, η δύναμη του ελατηρίου, έχει μέτρο:



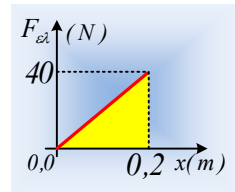
$F_{ελ} = k \cdot \Delta \ell = kx$, αφού πήραμε τη θέση φυσικού μήκους ως τη θέση με $x=0$. Έτσι η σχέση του μέτρου της δύναμης $F_{ελ}$ και της θέσης x γίνεται:

$$F_{ελ} = kx = 200x \quad (\text{μονάδες στο S.I.})$$

Η γραφική παράσταση της οποίας, φαίνεται στο διπλανό διάγραμμα.

Στη θέση B, τη στιγμή που μηδενίζεται η ταχύτητα, στο σώμα ασκείται δύναμη από το ελατήριο μέτρου 40N, οπότε έχει επιτάχυνση με φορά προς τα αριστερά και μέτρο:

$$\alpha_B = \frac{F_{ελ}}{m} = \frac{40}{2} m/s^2 = 20 m/s^2.$$



- iv) Στο παραπάνω διάγραμμα της δύναμης του ελατηρίου σε συνάρτηση με την απομάκρυνση του σώματος x (ίση και με την συσπείρωση του ελατηρίου), το εμβαδόν του κίτρινου τριγώνου, είναι αριθμητικά ίσο με το έργο της δύναμης. Προσοχή όμως. Το εμβαδόν του τριγώνου είναι θετικό, αλλά το έργο της $F_{ελ}$ είναι αρνητικό, αφού η δύναμη σχηματίζει γωνία 180° με τη μετατόπιση. Έτσι έχουμε:

$$W_{F_{ελ}/A \rightarrow B} = -\frac{1}{2} \cdot 0,2 \cdot 40 J = -4 J$$

- v) Εφαρμόζουμε για το σώμα το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας (Θ.Μ.Κ.Ε.) από τη θέση A μέχρι τη θέση B:

$$K_B - K_A = W_B + W_N + W_{F_{ελ}}$$

Όμως $W_B = W_N = 0$ αφού οι δυνάμεις είναι κάθετες στη μετατόπιση, οπότε:

$$0 - \frac{1}{2} m v_0^2 = 0 + 0 + W_{F_{ελ}} \rightarrow$$

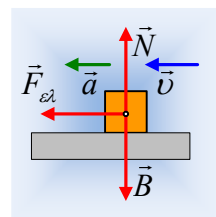
$$-\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot v_0^2 = -4 \rightarrow v_0^2 = 4 \rightarrow v_0 = 2 m/s$$

- vi) Στο ερώτημα iv) βρήκαμε ότι τη στιγμή που μηδενίζεται η ταχύτητα του σώματος στη θέση B, το σώμα έχει επιτάχυνση με φορά προς τα αριστερά με μέτρο $20 m/s^2$. Άρα το σώμα δεν θα σταματήσει αλλά θα επιταχυνθεί προς τα αριστερά και εντός ολίγου θα απομακρυνθεί από το ελατήριο έχοντας κάποια ταχύτητα v_1 . Εφαρμόζοντας ξανά το Θ.Μ.Κ.Ε. από τη θέση B στην θέση A, κατά την προς τα αριστερά κίνηση του σώματος, έχουμε:

$$K_A - K_B = W_B + W_N + W_{F_{ελ}} \rightarrow$$

Αλλά και πάλι $W_B = W_N = 0$, ενώ το έργο της δύναμης του ελατηρίου είναι και πάλι αριθμητικά ίσο με το εμβαδόν του τριγώνου στο διάγραμμα $F_{ελ}-x$, με τη διαφορά ότι τώρα είναι θετικό, αφού η δύναμη έχει την ίδια φορά με την μετατόπιση, οπότε με αντικατάσταση παίρνουμε:

$$\frac{1}{2} m v_1^2 - 0 = 0 + 0 + 4 \rightarrow v_1^2 = 4 \rightarrow v_1 = 2 m/s$$



Το σώμα δηλαδή εγκαταλείπει το ελατήριο, με την ίδια κατά μέτρο ταχύτητα με αυτήν που είχε όταν έφτασε στο άκρο του ελατηρίου Α.

Σχόλια:

- 1) Βλέπουμε παραπάνω ότι κατά μήκος της διαδρομής $A \rightarrow B \rightarrow A$ όπου στο σώμα ασκείται η δύναμη του ελατηρίου, το έργο της δύναμης αυτής είναι μηδενικό, αφού $W_{ολ} = W_{A \rightarrow B} + W_{B \rightarrow A} = -4J + 4J = 0$.

Αυτό σημαίνει ότι η δύναμη του ελατηρίου είναι συντηρητική (διατηρητική) δύναμη, οπότε μπορούμε να αποδώσουμε δυναμική ενέργεια στο ελατήριο, η μεταβολή της οποίας να συνδέεται με το έργο της $F_{ελ}$ με τη γνωστή σχέση $W_{F_{ελ}} = -\Delta U$.

- 2) Πράγματι, βλέπουμε ότι αρχικά το σώμα, πριν πέσει στο ελατήριο έχει κινητική ενέργεια:

$$K_{αρχ} = \frac{1}{2} m v_0^2 = 4J$$

Τη στιγμή που φτάνει στη θέση Β, η ταχύτητα μηδενίζεται, πράγμα που σημαίνει ότι το σώμα έχασε την ενέργειά του. Αυτό έγινε μέσω του έργου της $F_{ελ}$, αφού βρήκαμε ότι $W_{A \rightarrow B} = -4J$.

Αλλά αυτό σημαίνει ότι το ελατήριο πήρε ενέργεια από το σώμα 4J και τη στιγμή αυτή το ελατήριο **ΕΧΕΙ** ενέργεια 4J. Αυτήν την ενέργεια την ονομάζουμε **Δυναμική ενέργεια ελαστικότητας** του ελατηρίου, την οποία υπολογίζουμε από την εξίσωση:

$$U_{ελ} = \frac{1}{2} k (\Delta \ell)^2$$

- 3) Τελικά βέβαια η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου, ξαναδίνεται στο σώμα στη διάρκεια της προς τα αριστερά επιτάχυνσής του, με αποτέλεσμα το ελατήριο να επιστρέψει στο φυσικό μήκος του και η ενέργεια να έχει μεταφερθεί στο σώμα το οποίο έχει κινητική ενέργεια:

$$K_{τελ} = \frac{1}{2} m v_1^2 = 4J$$

Φυσικής-Χημείας

Γιατί το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους...

Επιμέλεια:

Διονύσης Μάργαρης